page 139 1/2

CONCOURS CENTRALE. MINES PONTS - T.A. Math 2

$\mathscr{E}$ désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3.

Préliminaire - Distance de deux droites non parallèles.

On considère deux droites non parallèles $D_1 = (A_1;\vec{u}_1)$ et $D_2 = (A_1;\vec{u}_2)$.

a) Montrer qu'il existe un couple unique λ_1,λ_2 de deux nombres réels tels que, si on pose

$$\overrightarrow{H_1A_1}=\lambda_1\vec{u}_1, \text{ et } \overrightarrow{H_2A_2}=\lambda_2\vec{u}_2$$

le vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$ soit ortogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.

b) Montrer que, pour tout couple (M_1,M_2) de points appartenant respectivement à D_1 et à D_2, la distance M_1M_2 est supérieure ou égale à la distance H_1H_2. Dans quel cas a-t-on l'égalité ? On dit que la distance H_1H_2 est la distance des droites D_1 et D_2 et on la note $d(D_1, D_2)$.

c) Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{n}$ est constant quand M_1 et M_2 décrivent respectivement D_1 et D_2. En déduire, par des choix convenables de M_1, M_2 et $\vec{n}$ la relation :

$$d(D_1, D_2) = \frac{|[\overrightarrow{A_1A_2},\vec{u}_1,\vec{u}_2]|}{\|\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2\|}$$

où $[\overrightarrow{A_1A_2},\vec{u}_1,\vec{u}_2]$ désigne le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ pris dans cet ordre.

d) Interpréter la condition $d(D_1, D_2) = 0$. Lorsque $d(D_1, D_2)\neq 0$, on dit que la droite (H_1,H_2) est la perpendiculaire commune à D_1 et D_2. Peut-on définir une perpendiculaire commune lorsque $d(D_1, D_2) = 0$?

Objectif et notations du problème.

Dans la suite du problème pour deux droites D_1 et D_2, quelconques (parallèles ou non), on appelle distance de ces deux droites, et on note $d(D_1, D_2)$, la borne inférieure de $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ quand M_1 décrit D_1 et M_2 décrit D_2.

Un ensemble de droites de $\mathscr{E}$ est dit régulier si pour tout couple D_1, D_2 de droites distinctes de cet ensemble on a $d(D_1, D_2) = 1$.

On note $\mathscr{C}(\Delta)$ le cylindre de révolution de rayon 1 dont l'axe est une droite Δ.

On rapporte $\mathscr{E}$ à un repère orthonormal direct R, $R = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Dans tout le problème on appelle D la droite $(O;\vec{k})$.

Par projection ou symétrie on entend projection ou symétrie orthogonale. Les figures et les démonstrations géométriques seront utiles et appréciées.

Partie I -

I.A -

Dans cette partie on construit un ensemble régulier de 4 droites.

Soit la droite D_1 d'équations $x - r = 0$ et $y - pz = 0$ où r et p sont deux réels donnés non nuls. On désigne par D_2 et D_3 les droites déduites de D_1 par les rotations d'axes $(O;\vec{k})$ et d'angles respectifs $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

I.A.1) Déterminer D_2 par un point du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ et un vecteur directeur.

I.A.2) Déterminer une symétrie axiale transformant D_2 en D_3 et laissant D_1 globalement invariante.

I.A.3)

a) Montrer que $\{D_1,D_2,D_3\}$ est un ensemble régulier si et seulement si $d(D_1, D_2) = 1$. Donner une relation entre p et r équivalente à cette condition.

b) Pour quelles valeurs de p et r l'ensemble $\{D,D_1,D_2,D_3\}$ est-il régulier ?

I.B -

I.B.1)

a) Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}(D)$. Quelle est la normale à $\mathscr{C}(D)$ en un point de $\mathscr{C}(D)$? (On la caractérisera géométriquement).

b) Quel est l'ensemble des droites D' telles que $d(D,D') = 1$? Comment se projettent-elles sur le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$?

I.B.2) Soit D' une génératrice de $\mathscr{C}(D)$. Décrire les ensembles réguliers de droites contenant D et D' et formés de :

a) 3 droites

b) 4 droites

c) Peut-on obtenir un tel ensemble contenant 5 droites ?

d) Déterminer les ensembles réguliers de droites parallèles à un même plan.

Partie II -

Soit α un réel fixé dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

II.1)

a) On considère la courbe E définie par le paramètrage :

$$x = \cos t \qquad y = \sin t \qquad z = (\tan\alpha).\cos t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Monter que E est une ellipse dont on précisera le plan P et une équation réduite dans P.

b) Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier une ellipse pour être tracée sur un cylindre de révolution de rayon 1 ? Préciser les axes des cylindres de révolution qui la contiennent.

II.2)

a) Montrer que les tangentes à E sont à une distance constante de D.

b) Quelle est l'enveloppe des droites D' contenues dans un plan donné, non parallèle à D, et vérifiant $d(D,D') = 1$?

II.3)

a) Soit D_t la tangente à E au point de paramètre t. Déterminer les points où la perpendiculaire commune Δ_t à D et D_t coupe ces droites.

b) Montrer que la surface S engendrée par Δ_t est contenue dans la surface S' d'équation :

$$(x^2+y^2)z^2 - x^2\tan^2\alpha = 0$$

c) En considérant l'intersection de S' avec un plan parallèle au plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ préciser les points de S' qui n'appartiennent pas à S.

II.4)

a) Montrer que S peut être représentée par le paramétrage suivant :

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = (\tan\alpha).\cos\theta, \qquad (\theta,\rho) \in \mathbb{R}^2$$

b) Calculer le volume du domaine borné limité par S et le cylindre $\mathscr{C}(D)$

Partie III -

Soit β un réel fixé dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. On appelle D' la droite définie par les équations

$$x - 1 = 0 \text{ et } z - y\tan\beta = 0.$$

III.1) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{C}(D')$ est :

$$(x-1)^2 + (y\sin\beta - z\cos\beta)^2 - 1 = 0.$$

Faire une figure représentant la projection sur $(O;\vec{i},\vec{j})$ de D', de $\mathscr{C}(D)$ et des génératrices de $\mathscr{C}(D')$ le long desquelles le plan tangent à $\mathscr{C}(D')$ est parallèle à D.

III.2) Soit Γ l'intersection de $\mathscr{C}(D)$ et de $\mathscr{C}(D')$.

a) Déterminer géométriquement trois axes de symétrie de Γ.

b) Quelle est la projection de Γ sur le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$?

c) Montrer que Γ est formée de l'arc paramétre Γ_1 défini par :

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = (\tan\beta)\sin t + \frac{1}{\cos\beta}\sqrt{\cos t\,(2-\cos t)},$$

t variant dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, et de son symétrique Γ_2 par rapport à la droite $(O;\vec{i})$.

d) Montrer que Γ admet deux tangentes V et V' parallèles à D. Préciser leurs points de contact.

e) Soit M un point de Γ, projeté en H sur D et en H' sur D'. Montrer que la tangente à Γ en M est perpendiculaire au plan $(M;\overline{MH},\overline{MH'})$.

f) Donner des exemples de courbes telles que toute tangente à ces courbes forme avec les droites D et D' un ensemble régulier.

III.3) On se propose de construire la projection γ de Γ sur le plan $(O;\vec{j},\vec{k})$

a) On pose $Y = y$ et $Z = z - y\tan\beta$. Déterminer les vecteurs $\vec{J}$, $\vec{K}$ tels que Y et Z soient les coordonnées dans le repère $(O;\vec{J},\vec{K})$ du point de coordonnées (y, z) dans le repère $(O;\vec{j},\vec{k})$.

b) Tracer γ.

••• FIN •••